Pitagora sosteneva che ogni cosa è *numero razionale*. Si racconta infatti che un giorno il matematico passando davanti alla bottega di un fabbro udì il suono dei martelli che battevano contro le incudini e i due suoni prodotti generavano una certa consonanza. Pitagora si domandò quale fosse la ragione che regolava tale differenza e, dopo aver riprodotto l'esperimento nel suo laboratorio, capì che i due martelli stavano nel rapporto di 2:1 sia in peso che in dimensioni e quindi producevano due suoni all'ottava.
Pitagora studiò il suono usando uno strumento costituito da una corda tesa fissata su una cassa risonante rettangolare munita di un ponticello mobile posto tra le estremità della corda. Era nato il *Monocordo*. Facendo vibrare la corda Pitagora osservava che la sensazione gradevole prodotta da due suoni simultanei era massima quando i rapporti numerici tra i due suoni erano semplici. Furono scoperti i tre accordi fondamentali di *Ottava, Quarta* e *Quinta.* I rapporti tra le lunghezze delle corde erano rispettivamente:

Ottava = 2: 1
Quarta = 4: 3
Quinta = 3: 2

Praticamente corrispondevano ai numeri della *Tetraktýs.*
Era appena nata la scienza acustica.
La scuola pitagorica considerava gli elementi numerici come elementi di tutte le cose poiché l'universo è armonia e numero e furono i primi a tradurre l'universo in un *cosmo* cioè in un sistema razionalmente ordinato.
Descartes, Keplero, Newton e Gallileo furono attratti dalla misteriosa simbiosi esistente tra le equazioni matematiche e la creazione musicale tanto da dedicare interi studi alla comprensione del suono come oggetto matematico. Con il termine harmonia gli antichi greci volevano intendere il concetto di "ben proporzionato", cioè era l'arte di trovare un numero Z una volta assegnati i primi due. Per armonia si intendeva quindi un algoritmo che ricercasse un medio proporzionale, così dunque si possono distinguere tre tipi di proporzioni:

- Medio aritmetico: B è tale che A – B = B – Z;
- Medio geometrico: C è tale che A : C = C : Z;
- Medio armonico: D è tale che $^1/_A - {}^1/_D = {}^1/_D - {}^1/_A$ ;

Ma i rapporti matematico-musicali non si limitano solo ai concetti dell'armonia, ma si estendono in particolar modo alla fisica del suono e alle forme compositive.
Anche a livello di costruzione della forma musicale si ritrovano molti principi matematici, è il caso del canone. Già nel 1474 Johannes Tinctoris nel *Definitorio dei termini musicali* definisce «una regola che indica l'intenzione nascosta del compositore» e osservando le opere dei compositori fiamminghi si può notare come esistano delle parti isomorfe, costituite cioè dalle *voci.* Infatti, come Ockeghem ha dimostrato, il canone può essere costruito su un minimo di 2 voci fino a un massimo di 36. I canoni godono anche di un'altra particolarità, possiedono cioè quattro forme di struttura che potremmo definire come *formule di risonanza*:

**Originale – Inversa – Retrograda – Retrograda Inversa;**

Queste quattro formule osservate allo specchio possono essere tradotte in semplici termini matematici:

**b = originale; p = inverso; d = retrogrado; q = retrogrado inverso**;

| | |
|---|---|
| **b** | **d** |
| **p** | **q** |

quindi si può trasformare il canone in termini di funzione matematica:

**f(x) = originale; -f(x) = inverso; f(-x) = retrogrado; -f(-x) = retrogrado inverso**;

Altri canoni, come i *canoni perpetui* che hanno una forma circolare, hanno la caratteristica di sembrare infiniti e possono essere suonati all'infinito perché ritornano sempre nella posizione iniziale.
Ma le funzioni matematiche nella musica si estendono anche al concetto di tonalità. Nella moderna pratica musicale lo studio dell'armonia del sistema temperato propone quella che viene chiamata rosa o circolo delle tonalità organizzato sulla base della regola delle Quinte. Tale regola vuole che partendo da una tonalità, per esempio il Do maggiore, per ottenere la tonalità successiva e proporzionale bisogna contare una quinta dal Do ottenendo la tonalità di Sol maggiore e così via. Inversamente basta contare una quinta indietro e si ottiene il Fa maggiore. In questo modo progredendo dal Do in avanti si ottengono tutte le tonalità che in armatura posseggono i diesis, sempre secondo un grado di proporzionalità si va da 1 diesis a 7 diesis, procedendo all'indietro si ottengono le tonalità con i bemolle, sempre però in modo proporzionale (da 1 bemolle a 7 bemolli).
Per ottenere un sistema così perfetto si dovette far fronte alla necessità di dividere in parti uguali la scala musicale in modo da far coincidere i suoni diesis con quelli bemolli così che quando una scala si legge in modo ascendente i semitoni risulteranno diesis, viceversa avranno lo stesso suono ma saranno identificati come bemolli.
Il temperamento equabile fu un ottimo sistema per eliminare le differenze di rapporti sonori che esistevano tra i diesis e i bemolli. Per eliminare tale differenza si pensò di considerare l'intervallo di Ottava limitato in 1 inferiormente e in 2 superiormente così da poter inserire tutte le note nell'intevallo **[1;2]**, a questo punto fu possibile ripartire l'intervallo in 12 parti uguali e tra loro esponenziali. Da questa considerazione si ottiene che il semitono ha il valore di $\mathbf{\sqrt[12]{2}}$ con cui costruire la scala temperata:

| **Nota** | **Do** | **Re** | **mi** | **fa** | **sol** | **La** | **si** | **do** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rapporto** | **1** | $(\sqrt[12]{2})^2$ | $(\sqrt[12]{2})^4$ | $(\sqrt[12]{2})^5$ | $(\sqrt[12]{2})^7$ | $(\sqrt[12]{2})^9$ | $(\sqrt[12]{2})^{11}$ | **2** |

In questo modo i dodici semitoni hanno tutti un valore uguale e si può dire che:

*La scala temperata è costruita sulla moltiplicazione di un numero che moltiplicato per se stesso 12 volte dia 2, cioè* $\sqrt[12]{2}$;

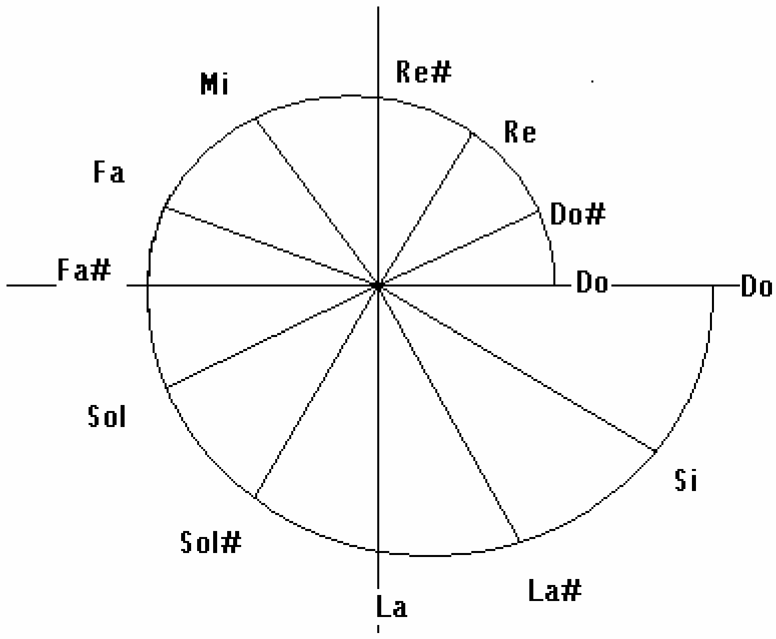
Considerando la questione in termini acustici si può dunque affermare che se moltiplichiamo il valore di una frequenza per la radice dodicesima di due otteniamo una frequenza che sta in rapporto di un semitono superiore rispetto a quella data; se dividiamo una frequenza per lo stesso valore otteniamo una frequenza che sta in rapporto inferiore di un semitono:

partendo dal La a 440 Hz avremo:

$\mathbf{440 \times \sqrt[12]{2} = 466{,}1624}$ **Hz** cioè avremo il La diesis;

**440 : $^{12}\sqrt{2}$ = 415,3059 Hz** cioè avremo il La bemolle;

Da queste considerazioni si giunge facilmente a capire come sia possibile realizzare un sistema tonale su base esponenziale.
Posizionando su un grafico le tonalità si otterrà una spirale logaritmica con angolo tra il raggio e la tangente di 77° 50′:




In termini di fisica delle onde il suono si può considerare come un fenomeno vibratorio di particelle che generano un'onda in continua condensazione e rarefazione. Il movimento periodico che si genera è di tipo ondulatorio ed è rappresentabile mediante una funzione trigonometrica:

$$a \cos (bx)$$

in cui *a* e *b* rappresentano rispettivamente l'ampiezza e la frequenza del suono.
Se il suono non si genera dall'origine allora sarà necessario introdurre anche il concetto di *fase* cioè una costante additiva *c.* L'equazione a questo punto diventa:

$$a \cos (bx+c) = a \cos (bx) \cos c - a \sin (bx) \sin c.$$

dato che *c,* cioè la fase, è una costante la funzione diventa:

$$a_1 \cos (bx) + a_2 \sin (bx).$$

Il moto periodico più adatto, sia da un punto di vista fisico-matematico, che musicale, è il moto vibratorio di una corda che per la prima volta fu descritto da D'Alambert nel 1747 con la famosa equazione d'onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

È noto che il progresso delle scienze matematiche ha portato alla comprensione dei fenomeni ondulatori e quindi alla comprensione del fenomeno sonoro e alla sua conseguente riproduzione sulla base di modelli matematici.
Taylor affermò che le vibrazioni di tutti i punti della corda sono isocrone e che il moto della corda è simile all'oscillazione pendolare. Facendo riferimento ai *Principia* di Newton studiò il moto di vibrazione della corda e arrivò a determinare l'espressione matematica che esprime la frequenza fondamentale:

$$\nu = ½L \sqrt{T/\rho}$$

dove:

$\nu$ = frequenza di vibrazione (modo fondamentale di vibrazione);
L = lunghezza della corda;
T = tensione applicata alla corda;
*P* = massa per unità di lunghezza della corda;

Spostando con un plettro il punto mediano della corda Taylor notò che questa si disponeva in modo triangolare e ciò non conciliava con la sinusoide che la corda descriveva durante il suo moto. Quindi il matematico ipotizzò che la corda si disponeva secondo la curva appropriata dopo poche vibrazioni e non fece nessun riferimento al fenomeno dei suoni armonici perché ritenne che questi fossero estranei al campo della matematica. Per formulare nuove teorie riguardanti i corpi vibranti era necessario sviluppare nuovi strumenti matematici come le equazioni differenziali alle derivate parziali.
Daniel Bernoulli nel 1775 scoprì che il tono fondamentale scaturisce dalla libera vibrazione della corda fissata solo ai due estremi, senza punti fissi intermedi. Bloccando la corda rispettivamente a ½ e a ⅓ si ottengono l'Ottava ($do_2$) e la Quinta (sol), così facendo si può costruire una serie armonica in cui ogni termine è la media armonica del precedente. Sommando le onde stazionarie Bernoulli ottenne una nuova equazione basata su una serie trigonometrica di suoni armonici:

$$f(x) = \sum a_n \cos (b_n x)$$

in questa equazione $b_n$ rappresenta le frequenze degli armonici multipli interi del tono fondamentale $b$. Da ciò si può dire che la frequenza del tono fondamentale è uguale a quella del suono composto determinando così la sua altezza. Per quanto riguarda le ampiezze dei vari armonici queste diventano responsabili dell'intensità e del timbro.

Bernoulli spiega che qualunque vibrazione è costituita da una mescolanza di vibrazioni semplici e regolari indipendenti tra di loro, quindi una corda può compiere il suo moto vibratorio sia in modo semplice che secondo una qualunque combinazione di diversi modi sostenendo così che le curve e i nuovi tipi di vibrazioni scoperti da Euler e da D'Alambert non sono altro che la mescolanza di più tipi di moti vibrazionali secondo la trattazione tayloriana. Infatti, studiando la corda vibrante, Taylor aveva trovato l'espressione:

$$\mathbf{y = \alpha \sin \pi x/a + \beta \sin 2\pi x/a + \ldots}$$

dove :

x = ascissa
y = ordinata
a = lunghezza del filo
$\alpha$ e $\beta$ = sono determinati coefficienti

Se negli studi precedenti Bernoulli aveva dimostrato l'esistenza di vibrazioni irregolari, adesso sostiene che in realtà queste vibrazioni sono un mèlange di vibrazioni semplici, regolari e permanenti di diverse specie e tutte concorrono al moto totale del sistema senza recarsi disturbo a vicenda.

La teoria di Bernoulli fu la base di partenza per gli studi di Fourier sul calore, sintetizzate nell'opera *Théotie analytique de la chaleur* (1822), intuendo che ogni funzione periodica si può esprimere tramite una serie trigonometrica.  Il teorema di Fourier fu fondamentale per lo sviluppo della fisica acustica perché senza la traduzione nel modello matematico non sarebbe stato possibile determinare la reale natura del suono. Fourier, infatti, afferma che:

*Una qualsiasi funzione limitata e continua o con discontinuità di prima specie si può esprimere come somma di N funzioni dello stesso tipo. Al tendere di N all'infinito la somma converge alla funzione.*

In parole più semplici descrive il suono come la sommatoria delle funzioni matematiche che descrivono i suoni armonici ottenendo come risultato non solo un suono complesso nella sua accezione di altezza e intensità, ma anche come timbro.

Fourier si accorse che per ottenere i coefficienti $a_n$ della serie doveva calcolare particolari integrali della funzione stessa:

$$\mathbf{f(x) = \sum a_n \cos (nx)}$$

si moltiplicano i due membri per cos (mx) e si integra ottenendo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f(x) = \cos (mx)\, dx} = \int_{-\pi}^{\pi} a_m \cos^2 (mx)\, dx = a_m \pi$$

questo perché:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f(x) = \cos (nx) \cos (mx)\, dx = 0} \qquad \text{se } n \neq m$$

Tutto ciò dimostra la connessione tra il suono, nell'accezione della fisica, e la matematica. La musica però ha anche una componente mistica che si esprime bene nella matematica. Se la spirale logaritmica può descrivere bene la base esponenziale del circolo delle quinte è anche vero che possiede una forte analogia con la morfologia dell'organo uditivo: la coclea. Infatti proprio l'organo deputato a scomporre il suono nelle sue parti fondamentali e a inviare i dati al cervello per poterli immagazzinare è costruita proprio sul rapporto della spirale logaritmica. Sembra quasi dimostrare una forte analogia tra la meccanica uditiva e la capacità di produrre suoni organizzati che compongono la musica.